

8. (i) निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए :

Solve the following differential equation

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2.$$

- (ii) सिद्ध कीजिए कि निम्न चार बिन्दु समतलीय हैं :

$$4i + 5j + k, -j - k, 3i + 9j + 4k \text{ और } -4i + 4j + 4k.$$

Prove that the following four points are coplanar :

$$4i + 5j + k, -j - k, 3i + 9j + 4k \text{ and } -4i + 4j + 4k. \quad 6 \times 2$$

104

MAY 2010

APPLIED MATHEMATICS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 70

नोट :—(i) प्रथम प्रश्न अनिवार्य है, शेष में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

Question No. 1 is compulsory, answer any Five questions from the remaining.

(ii) प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को क्रमवार एक साथ हल कीजिये।

Solve All parts of a question consecutively together.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को नये पृष्ठ से प्रारम्भ कीजिये।

Start each question on fresh page.

(iv) दोनों भाषाओं में अन्तर होने की स्थिति में अंग्रेजी अनुवाद ही मान्य है।

Only English version is valid in case of difference in both the languages.

1. (i) सिद्ध कीजिए कि

Prove that :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

एक लाम्बिक मैट्रिक्स है ।

is a orthogonal matrix.

- (ii) बिन्दु (5, 5) से रेखा $3x - 4y + 10 = 0$ की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the perpendicular distance from the point (5, 5) to the straight line

$$3x - 4y + 10 = 0.$$

- (iii) कोण x का मान ज्ञात कीजिए जब x , $\sin x$ की तुलना में दुगुनी दर से बढ़े ।

Find the angle x which increases twice as fast as its sine.

Contd...

- (iv) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

को हल कीजिए ।

Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

- (v) सदिश $i + 4j + 3k$ एवं $4i + 2j - 4k$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

Find the dot product of the vectors $i + 4j + 3k$ and $4i + 2j - 4k$. <http://www.rtuonline.com> 2×5

2. (i) सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots = \frac{1}{2} \log 2.$$

K.T.O.

(ii) सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16} \quad 6 \times 2$$

3. (i) सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(ii) न्यूटन-रेफसन विधि द्वारा समीकरण $x^3 - 3x - 5 = 0$ का वास्तविक मूल चार दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए ।

Find the real root of the equation

$$x^3 - 3x - 5 = 0.$$

Correct to four places of decimals by Newton Raphson method. 6×2

Contd...

4. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 2), (3, -4) एवं (5, 6) से गुजरता है ।

Find the equation of the circle which passes through the points (1, 2), (3, -4) and (5, 6).

(ii) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (1, 1) नियता $x - y + 3 = 0$ तथा उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{2}$ है ।

Find the equation of an ellipse whose focus, directrix and eccentricity are (1, 1), $x - y + 3 = 0$ and $e = \frac{1}{2}$ respectively. 6×2

5. (i) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-2, -3) से गुजरती है तथा रेखा $2x + 3y + 5 = 0$ के समान्तर है ।

Find the equation of the straight line passing through the point (-2, -3) and is parallel to the line $2x + 3y + 5 = 0$.

K.T.O.

(ii) यदि

If

$$y = \sin^{-1} \left[x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2} \right]$$

तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।then find $\frac{dy}{dx}$. 6×26. (i) यदि फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार परिभाषित है किIf the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^3}{4}, & 2 \leq x \end{cases}$$

तो $x = 2$ पर फलन $f(x)$ के सांतत्य का परीक्षण कीजिए ।then test the continuity of the function $f(x)$ as $x = 2$.

Contd...

(ii) सिद्ध कीजिए कि वक्र

$$ax^2 + by^2 = 1 \text{ तथा } a'x^2 + b'y^2 = 1$$

एक दूसरे को समकोण पर काटेंगे यदि

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$

Prove that the curves

$$ax^2 + by^2 = 1 \text{ and } a'x^2 + b'y^2 = 1$$

intersects orthogonally if

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$

6×2

7. निम्न समाकलन हल कीजिए :

Solve the following integrals :

$$(i) \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$$

$$(i) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx.$$

6×2

K.T.O.